Метрические пространства

Метрическим пространством называется пара: множество X и функция $\rho(x,y)$ двух переменных, принадлежащих X. Функция $\rho(x,y)$ называется метрикой на X или расстоянием между x и y. Предполагается выполнение следующих аксиом:

1a) $\forall x,y\in X \qquad \rho(x,y)\ge 0$;

1b) $\forall x\in X \qquad \rho(x,x)=0$;

1c) $\forall x\ne y\in X \qquad \rho(x,y)>0$;

2) $\forall x,y\in X \qquad \rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) $\forall x,y,z\in X \qquad \rho(x,y)+\rho(y,z)\ge \forall x,y\in X \qquad \rho(x,y)+\rho(y,z)\ge\rho(x,z)$.

<u>Примеры.</u> i) $X=\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y)$ - евклидово расстояние между двумя точками (векторами) n-мерного пространства. ii) кратчайшее расстояние между двумя точками на гладкой поверхности вдоль по этой поверхности. iii) расстояние между двумя графами с одинаковым набором вершин равно количеству ребер, которые нужно стереть или добавить, чтобы из первого графа получить второй. iv) тривиальное расстояние: между любыми различными точками X оно равно 1.

Подмножество метрического пространства – метрическое пространство.

Сходимость последовательности $x_n\to x_*\Leftrightarrow\rho\left(x_n,x_*\right)\to 0$.

Множество в метрическом пространстве замкнуто, если содержит все свои предельные точки.

Метрическое пространство полное, если любая фундаментальная последовательность сходится.