Нормированные пространства

Пусть множество X – линейное пространство. Оно называется нормированным пространством, если на нем задана функция $x \mapsto \|x\|$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1а) $\forall x \in X \ \ \|x\| \geq 0$,

1б) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

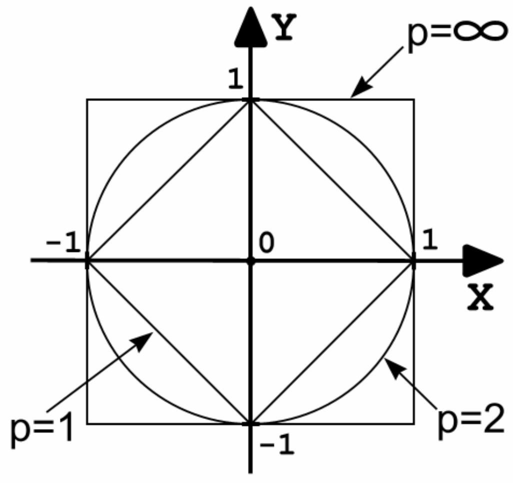
2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in K \ \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ - иногда говорят, что норма полулинейна.

3) $\forall x, y \in X \ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника.

Расстояние в нормированном пространстве определяется формулой: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Все аксиомы метрического пространства легко проверяются.

В $\mathbb{R}^n$ много норм. При $1 \leq p < \infty$ определим $\|\vec{x}\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right]^{1/p}$, $\|\vec{x}\|_\infty = \max_j |x_j|$. При *p=1* эта норма называется октаэдрической, при *p=2* - сферической или евклидовой, при $p = \infty$ - чебышевской.



←Единичная сфера в $\mathbb{R}^2$ для разных норм.

Норма задает единичную сферу уравнением $\|\vec{x}\| = 1$.

Но и единичная сфера полностью задает норму.