Нормированные пространства-2

Если задана единичная сфера, то по ней восстанавливается (по полулинейности) норма во всем пространстве X. Проведем через две точки $0 \neq x \in X,\ 0 \in X$ прямую. Она должна проткнуть единичную сферу дважды. Точку протыкания с той же стороны от нуля, что и x, обозначим y. Тогда $x = ty,\ t \in \mathbb{R}_+$. И норма x равна t.

Какое множество может быть единичной сферой? Выпуклое множество, такое что любая прямая, проходящая через 0 пересекает его ровно в двух точках (в комплексной версии – по окружности).

Нормы в пространстве непрерывных функций. $C_{[a,b]}:\ \|f(x)\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

$L^p_{[a,b]}:\ \|f(x)\| = \left[\int\limits_a^b |f(x)|dx\right]^{1/p}$; $p \geq 1$. На подпространстве гладких функций можно определить, например, норму $C^1_{[a,b]}:\ \|f(x)\| = \max\left\{\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|, \sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|\right\}$. Аналогично и для k-гладких функций. Соболевские пространства: $W^{2,m}_{[a,b]}:\ \|f(x)\| = \left[\int\limits_a^b |f(x)|^2 + |f^{[m]}(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$. Не все эти нормированные пространства – полные. Но их можно пополнить: вложить данное нормированное пространство X в нормированное пространство Y, которое а) полное, б) $\overline{X} = Y$. Полные линейные нормированные пространства называются банаховыми.